第 8 期
2007 年 8 月

电　子　学　报
ACTA ELECTRONICA SINICA

Vol. 35　No. 8
Aug.　2007

一种新的区间-遗传算法

张晓伟，刘三阳
(西安电子科技大学数学科学系，陕西西安 710071)

摘　要：针对传统区间优化算法求解高维问题耗时的缺点，本文将区间算法和遗传算法进行融合，给出了一种区间-遗传算法，该算法保留了传统区间优化算法简单、对问题本身信息要求不高的优点. 重要的是在每次迭代中区间算法为遗传算法的搜索提供可靠区域，同时遗传算法为区间算法的区间分裂提供了一个方向、为区间删除给出了问题全局最优解的一个上界. 最后给出了算法的收敛性证明，数值实验表明该算法相比传统区间优化算法有较高执行效率.

关键词：　遗传算法；区间算法；全局优化

中图分类号：　TP301；O224　　**文献标识码**：　A　　**文章编号**：　0372-2112 (2007) 08-1567-05

A Novel Interval-Genetic Algorithm

ZHANG Xiao-wei，LIU San-yang
(*Department of Mathematical Sciences*, *Xidian University*, *Xi'an*, *Shaanxi* 710071, *China*)

Abstract：　To overcome the shortcoming of high computational cost of traditional interval optimization algorithms for high dimensional problems，an interval-genetic algorithm is presented that combines interval arithmetic and genetic algorithm. The algorithm has the advantages of simplicity and less knowledge about problems as traditional interval optimization algorithms. What is more，at each iteration the interval arithmetic provides the domains for the genetic algorithm to search，moreover，the genetic algorithm gives a direction to divide the reliable interval，and an upper bound of global optimum for a problem used to discard the intervals. Finally，a convergence is proved and numerical experiments show that the algorithm is more efficient than traditional interval optimization algorithms.

Key words：　genetic algorithm；interval arithmetic；global optimization

1　引言

遗传算法所采用的随机搜索技术大大提高了算法全局寻优能力，但是这种随机性往往使得算法陷入局部最优[1]，特别当搜索空间较大时，多峰值优化问题往往发生这种情况. 区间算法[2,3]由 Moore 给出，该算法的可靠、简单等特性深得工程人员的喜爱，其基本思想是以区间分析为基础，用区间变量代替点变量按照区间运算规则进行区间计算，并将分支定界算法和 Moore-Skelboe 算法相结合[4]，分支定界技术可将可行空间缩减成一些很小的区域，而这些区域之并保留着问题的全局最优解，那么遗传算法在这些小区间里搜索肯定会得到精度更高的全局最优解. 但是对高维优化问题，区间算法计算的耗时以及物理内存的开支或不足表现得尤为突出，原因有三：(1) 目标函数或梯度函数的区间扩张的过估计；(2) 问题的高维数；(3) 目标函数不可微. 解决这个问题的方法之一是加速工具的构造. 现有的加速工具均在求目标函数及其导数的自然区间扩张，或在利用 Lipschitz 常数获得一阶或二阶区间扩张的基础上，构造中点考查、单调性原则、凸性原则等加速工具进行区间删除，但当目标函数不可微时，大多数加速工具失效. 由于加速工具构造的困难性，人们在这方面的研究大都集中在区间分裂方向、分裂个数以及区间选择规则等方面. Sotiropoulos[5]利用遗传算法、区间算法和作者所提出的当前缩小区间来改进目标函数值范围的上、下界；Zilinskas[6]基于数值实验的基础运用统计的方法来估计目标函数值的范围，Casado[7,8]等提出了一个新的启发式选择规则，在算法执行时选取最大拒绝指标的区间进行分裂来提高算法的执行效率. 本文提出了一种区间-遗传算法，该算法将遗传算法运用在区间算法中，以此为区间的删除和分裂提供指导，同时区间算法又为遗传算法的搜索范围进行定界. 最后的数值试验表明所提出的算

收稿日期：2006-11-23；修回日期：2007-04-23
基金项目：国家自然科学基金(No. 60574075)

法与传统区间优化算法相比有较高的执行效率.

2 区间算法

区间 A 是一个有界闭集,定义 $A=[\underline{a},\bar{a}]=\{x\in\mathbb{R}\mid\underline{a}\leqslant x\leqslant\bar{a}\}$,这里 $\underline{a},\bar{a}\in\mathbb{R}$,$\underline{a}\leqslant\bar{a}$,显然 $\underline{a}=\bar{a}$ 时,A 就表示一个实数.所有具有 A 形式的区间组成的集合记作为 $\mathcal{I}(\mathbb{R})$. $m(A)=\frac{1}{2}(\underline{a}+\bar{a})$,$r(A)=\frac{1}{2}(\bar{a}-\underline{a})$,$w(A)=\bar{a}-\underline{a}$ 分别表示区间 A 的中点,半径,宽度.区间运算如下定义:

$$A\otimes B=\{a\otimes b\mid a\in A,b\in B\}$$

这里 $A,B\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$,$\otimes$ 表示四则运算 $+,-,*,/$ 中的任一个.上式等价于下面的四个式子:

$$A+B=[\underline{a}+\underline{b},\bar{a}+\bar{b}]$$

$$A-B=[\underline{a}-\bar{b},\bar{a}-\underline{b}]$$

$$A*B=[\min\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b},\bar{a}\underline{b},\bar{a}\bar{b}\},\ \max\{\underline{a}\underline{b},\underline{a}\bar{b},\bar{a}\underline{b},\bar{a}\bar{b}\}]$$

$$A/B=A*[1/\bar{b},1/\underline{b}],0\notin B$$

如下定义区间 A 的 m 次幂:

$$A^m=\begin{cases}[1,1], & \text{若 } m=0\\ [\underline{a}^m,\bar{a}^m], & \text{若 } \underline{a}\geq 0,\text{或 } \underline{a}\leqslant 0\leqslant\bar{a},m\text{ 是偶数}\\ [\bar{a}^m,\underline{a}^m], & \text{若 } \bar{a}\leqslant 0,m\text{ 是奇数}\\ [\underline{a}^m,\bar{a}^m], & \text{若 } \bar{a}\leqslant 0,m\text{ 是偶数}\\ [0,\max(\underline{a}^m,\bar{a}^m)], & \text{若 } \underline{a}\leqslant 0\leqslant\bar{a},m\text{ 是偶数}\end{cases}$$

如果 $A\in\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$,则 A 具有如下形式:

$$A=(A_1\ \cdots\ A_i\ \cdots\ A_n)^{\mathrm{T}},A_i\in\mathcal{I}(\mathbb{R})$$

$m(A),r(A),w(A)$ 如下定义:

$$m(A)=(m(A_1)\ \cdots\ m(A_i)\ \cdots\ m(A_n))^{\mathrm{T}}$$

$$r(A)=(r(A_1)\ \cdots\ r(A_i)\ \cdots\ r(A_n))^{\mathrm{T}}$$

$$w(A)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(w(A_i))$$

$\mathcal{F}:\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)\to\mathcal{I}(\mathbb{R})$:被称作区间函数:如果 $f(X_1,X_2,\cdots,X_n)\subseteq\mathcal{F}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,$X_i\subseteq A_i$,$\mathcal{F}$ 称作 f 的区间扩张.一个自然的区间扩张就是用区间 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 代替 $f(x)$ 中的 x,记为 $\mathcal{F}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

区间算法运用分支定界技术,剪枝,单调性测试将初始区间连续划分成更小的子区间,在此过程中,不包含全局最优点的子区间被删掉,其余的子区间则继续划分到满意的区间宽度为止.

3 区间遗传算法

本文是对以下问题进行考虑:

$$global\ \min_{X\in\Omega\subset R^n} f(X)$$

这里 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 连续可微,$\Omega=\prod_{i=1}^{n}[l,u]$. l,u 为实数,$l\leqslant u$.

本节所提出的区间—遗传算法有下面的特点:(1)具有传统区间优化算法的特性;没有利用凹性,Hesse 矩阵等信息,也没有进行局部搜索操作,而是利用了剪枝和单调性检验;(2)自身特性;利用区间算法缩小遗传算法的搜索区域,指导遗传算法的搜索方向,利用遗传算法得到了全局最优的一个上界,加速区间的删除.

$W=\{R^1,\cdots,R^j,\cdots,R^K\}$,$R^j\in\mathcal{I}(\mathbb{R}^n)$,$K>0$ 为整数,这里 R^j 表示 W 中第 j 个区间,f^* 是全局最优值,则下面的关系式成立:

$$\min_j\{L(R^j)\}\leqslant f^*\leqslant\min_j\{U(R^j)\}.$$

这里 $L(R^j)$,$U(R^j)$ 表示 $\mathcal{F}(R^j)$ 的下边界,上边界,τ 定义为 $\min_j\{U(R^j)\}$,$j=1,\cdots,K$.

剪枝:如果 $L(R^j)>\tau$,那么将 R^j 从 W 中删去.

分支定界:如果 $L(R^j)\leqslant\tau$,将 R^j 平分成两个小的子区间,进而如果 $w(\mathcal{F}(R^j))\leqslant\delta$,那么将 R^j 从 W 移到集合 S 中,否则继续保留在 W 中,这里 δ 是事先指定的精度.对于 $n>1$,沿 R^j 的最大半径的分量的方向平分.把划分后的两个小区间的最小上边界定义为 $\bar{\tau}$,如果 $\bar{\tau}<\tau$,则将 τ 更新为 $\bar{\tau}$,再者若 τ 小于某个小区间的下边界,则将这个小区间从 W 中删掉,因为此时最优解肯定不会超过 τ.

单调性测试:如果 $0\notin(\mathcal{F}'(R^j))_i$,那么将 R^j 从 W 中删去.这里,$(\mathcal{F}'(R^j))_i$ 表示 $f(x)$ 的梯度函数 $f'(x)$ 在区间 R^j 上的自然区间扩展函数 $\mathcal{F}'(R^j)$ 的第 i 个分量.

$X=(x_1\cdots x_j\cdots x_n)^{\mathrm{T}}$ 的编码为 $x_1x_2\cdots x_j\cdots x_n$,$x_j$ 为 X 的第 j 个分量.为了方便,我们可认为 $X=x_1x_2\cdots x_j\cdots x_n$.适应度函数定义为 $Fitnessf(X)=-f(X)$.采用轮盘赌选择,对每个个体 X^i,其被选择的概率定义以如下

$$P_s^i=\frac{Fitnessf(X^i)-\mathrm{Min}(Fitnessf(\overrightarrow{X(t)}))+1}{\sum_{j=1}^{n}[Fitnessf(X^j)-\mathrm{Min}(Fitnessf(\overrightarrow{X(t)}))+1]}$$

这里,$\overrightarrow{X(t)}$ 是第 t 代种群,$\mathrm{Min}(Fitnessf(\overrightarrow{X(t)}))$ 表示第 t 代种群的个体的最小适应度.这样做的好处是既能够保证选择概率非负,又避免了通常做法中事先估值的麻烦.

下面给出了传统区间优化算法的 matlab 程序伪代码.

算法 1

$W_1=\Omega$;$W=\{W_1\}$;$\tau=U(W_1)$;$R=\varnothing$;

while $W\neq\varnothing$

$i=\{j\mid L(R^j)\leqslant L(R^k),\forall R^k\subset W\}$;

$C=R^i$;

将 R^i 从 W 中除去,把 C 划分成 C^1 和 C^2;

$\bar{\tau} = \min\{U(C^1), U(C^2)\}$;

if $\bar{\tau} < \tau$　$\tau = \bar{\tau}$;

if $\tau < L(C^i)$或 $0 \notin \mathcal{F}'(C^i)$

将 C^i 从 W 中除去;end

end

if $L(C^i) \leqslant \tau$　$(i = 1,2)$

if $w(\mathcal{F}(C^i)) \leqslant \delta$　将 C^i 并入到 R 中;

else　　将 C^i 并入到 W 中;end

end

end

下面我们给出区间—遗传算法.

算法 2

Step 1　沿最大边方向 M 等分可行域空间 Ω,形成 M 个子空间 $W_t = \{R^1, \cdots, R^j, \cdots, R^M\}$,若 $0 \notin \mathcal{F}'(R^j)$, $j = 1, \cdots, M$,则 $W_t = W_t - R^j$;令 $\overrightarrow{X(t)} = \varnothing$, $S = \varnothing$.

Step 2　如果 $W_t = \varnothing$,对任意 j, $R^j \in W_t$,输出 $m(R^j)$,输出 f_t^*;否则,如果 $w(\mathcal{F}(R_i)) < \varepsilon = 1e-6$,则 $W_t = W_t - R^j$, $S = S \cup R^j$.

Step 3　如果 $W_i \cap \overrightarrow{X(t)} = \varnothing$,在 W_t 中的每个区间里随机产生一个个体形成种群 $\overrightarrow{X(t)} = \{X^{t1}, \cdots, X^{ti}, \cdots\}$;否则,在 W 中每一个没有包含 X^{ti} 的区间里随机产生一个个体形成种群 $\overrightarrow{Y(t)}$, $\overrightarrow{X(t)} = \overrightarrow{X(t)} \cup \overrightarrow{Y(t)}$;然后记录个体 X^{ti} 所在区间的位置,记作 $I(X^{ti})$, $i = 1, \cdots, i, \cdots$.

Step 4　对 $\overrightarrow{X(t)}$ 中的 1/3 个体以概率 P_m 进行如下变异: $X^{ti} = x_1^{ti} \cdots \overline{x_i^{ti}} \cdots x_n^{ti}$, $\overline{x_i^{ti}} = rand(\underline{r}_i^{I(X^{ti})}, \bar{r}_i^{I(X^{ti})})$, $[i] = rand(1, n)$.这里 $rand(a, b)$ 表示 a b 之间的随机数, $a, b \in R$. $[i]$ 是取 i 的整数部分.

Step 5　$t = X_+$,选择 N 个个体, $X_- = t$,产生下一代种群 $\overrightarrow{X(t+1)}$,记录当前最优解 X_t^*,最优值 f_t^*.这里

$X_+ = \{X^{ti} \mid Fitnessf(X^{ti}) \geq Fitnessf(X^{tj}), j = 1, \cdots, N\}$

$X_- = \{X^{ti} \mid Fitnessf(X^{ti}) \leqslant Fitnessf(X^{tj}), j = 1, \cdots, N\}$.

Step 6　对任意 j,求解 $L(R^j)$, $U(R^j)$,令 $\tau = \min(U(R^j), f_t^*)$,如果 $\tau < L(R^j)$或 $0 \notin \mathcal{F}'(R^j)$,则 $W = W - R^j$,否则转 Step 7.

Step 7　如果 $f_t^* \in R^j$,则对 R^j4 等分,这里 $j = \{i \mid L(R^i) \leqslant L(R^k), \forall R^k \subset W\}$;否则对 R^j 和 f_t^* 所在的区间各 2 等分,转 Step 2.

在算法 2 中,区间算法和遗传算法相互引导,逐渐向全局最优解靠拢.提出的算法会比一般遗传算法有效,因为在不影响问题全局最优解的前提下可以放宽求解的初始区域,而在一个大的区间内搜索遗传算法不是很有效.我们主要是期望算法 2 比传统区间优化算法有效,原因在于遗传算法的应用可以使得区间算法以较高的概率去分裂包含全局最优解的区间,同时根据提供的上界会删除工作集中大量的区间.

4　收敛性分析

由算法 2 的 Step 7 可以看出,无论具有最小下界的区间是否包含当前种群中的最优解,该区间都被划分,至少被两等份.由 Step 3-7,遗传算法在当中起的作用有两点:(1)为全局最优解提供一个好的可靠上界(Step 6);(2)考虑了包含当前种群最优解的区间的分裂,用意在于指导区间算法的分裂方向,提高算法的执行效率(Step 3,7),因此算法总体属于区间优化算法框架.

定理 1　设 $f(X)$在 Ω 上连续可微, $X^* = \{X \mid f(X) = f^*, X \in \Omega\}$, f^* 为问题的全局最优值,如果对任意的 $R^j \subseteq \Omega$,当 $w(R^j) \to 0$ 时,有 $w(\mathcal{F}(R^j)) \to 0$,则有下面结论成立:

(1) $W_t \supseteq W_{t+1}$, $t = 1, 2, \cdots$.

(2) $f^* \in \bigcup_{j=1}^{|W|} \mathcal{F}(R^j)$,这里 $W = \{R^1, \cdots, R^j, \cdots\}$.

(3)当 $t \to \infty$ 时,对 $R_t^* \in W_t$,有 $\mathcal{F}(R_t^*) \to f^*$.这里 R_t^* 为包含 X^* 的区间.

证明:

(1)由算法 2 知,显然成立.

(2)由算法知, $X^* \in \bigcup_{j=1}^{|W|} R^j$, $W = \{R^1, \cdots, R^j, \cdots\}$,因为 $f(X)$连续,所以 $f(X^*) \subset f(\bigcup_{j=1}^{|W|} R^j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{|W|} f(R^j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{|W|} \mathcal{F}(R^j)$,因此 $f^* \in \bigcup_{j=1}^{|W|} \mathcal{F}(R^j)$.

(3)对 $X^* \in R_t^* \subset W_t$,当 $t \to \infty$ 时, $w(R_t^*) \to 0$,所以有 $R_t^* \to X^*$,由已知得 $w(\mathcal{F}(R_t^*)) \to 0$,因为 $f(X^*) \in f(R_t^*) \subset \mathcal{F}(R_t^*)$,所以 $\mathcal{F}(R_t^*) \to f(X^*) = f^*$.证毕.

5　数值实验

例 1　Deceptive 函数

$$\min f(x) = \frac{-20}{0.09 + (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 6)^2} + x_1^2 + x_2^2$$

搜索区域: $-1000 \leqslant x_i \leqslant 1000$, $i = 1, 2$,这是一个所构造的具有典型 GA 欺骗性的函数,有两个极小值点 $X_1^* = (0.0233, 0.0233)$, $f(X_1^*) = -0.2785$; $X_2^* = (5.9976, 5.9976)$, $f(X_2^*) = -150.2514$,全局最优点为 X_2^*.

例 2　Levy 函数

$$\min f(x) = \sin^2(\pi y_1) + \sum_{i=1}^{n-1} [(y_i - 1)^2(1 + 10 \cdot \sin^2(\pi y_i + 1))] + (y_n - 1)^2(1 + 10 \cdot \sin^2(2\pi y_n))$$

$$y_i = 1 + \frac{x_i - 1}{4}, i = 1, \cdots, n$$

搜索区域: $-10 \leqslant x_i \leqslant 10$, $i = 1, \cdots, n$,有多个局部最优点,全局最优点 $x^* = (1, \cdots, 1)$,最优值 $f(x^*) = 0$.

例 3 Beale 函数

$$\min f(x)=(1.5-x_1+x_1x_2)^2+(2.25-x_1+x_1x_2^2)^2+(2.625-x_1+x_1x_2^3)^2$$

搜索区域：$-4.5\leqslant x_i\leqslant 4.5$，$i=1,2$；仅有一个全局最优点 $x^*=(3,0.5)$，最优值 $f(x^*)=0$.

例 4 Griewank 函数

$$\min f(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{4000}-\prod_{i=1}^{n}\cos\frac{x_i}{\sqrt{i}}+1$$

搜索区域：$-500\leqslant x_i\leqslant 700$，$i=1,\cdots,n$，有多个局部最优点，全局最优点 $x^*=(0,\cdots,0)$，最优值 $f(x^*)=0$.

例 5 Rastrigin 函数

$$\min f(x)=10\cdot n+\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2-10\cos(2\pi x_i)\right]$$

搜索区域：$-5.12\leqslant x_i\leqslant 5.12$，$i=1,\cdots,n$，有多个局部最优点，全局最优点 $x^*=(0,\cdots,0)$，最优值 $f(x^*)=0$.

例 6 Sphere 函数

$$\min f(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

搜索区间：$-100\leqslant x_i\leqslant 100$，$i=1,\cdots,n$. 有多个局部最优点，全局最优点 $x^*=(0,\cdots,0)$，最优值 $f(x^*)=0$.

例 7 Branin 函数

$$\min f(x)=\left(x_2-\frac{5.1}{4\pi^2}x_1^2+\frac{5}{\pi}x_1-6\right)^2+10\cdot\left(1-\frac{1}{8\pi}\right)\cos x_1+10$$

搜索区间：$-5\leqslant x_1\leqslant 10$，$0\leqslant x_2\leqslant 15$，仅有三个全局最优解 $\{(-\pi,12.275),(\pi,2.275),(9.42478,2.475)\}$，全局最优值为 0.397887.

例 8 Schwefel 函数

$$\min f(x)=-\sum_{i=1}^{n}\left(x_i\sin\sqrt{|x_i|}\right)$$

搜索区域：$-500\leqslant x_i\leqslant 500$，$i=1,\cdots,n$，有多个局部最优点，全局最优点 $x^*=(420.968746,\cdots,420.968746)$，最优值 $f(x^*)=-418.982887\cdot n$.

例 9 Six Hump Camel Back 函数

$$\min f(x)=4x_1^2-2.1x_1^4+\frac{1}{3}x_1^6+x_1x_2-4x_2^2+4x_2^4$$

搜索区域：$-5\leqslant x_i\leqslant 5$，$i=1,2$. 有 6 个局部最优解，全局最优解为 $\{(0.08984,-0.71266)\}$，$\{-0.08984,0.71266\}$，全局最优值为 -1.031628.

例 10 Shubert 函数

$$\min f(x)=\prod_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{5}j\cdot\cos[(j+1)x_i+j]$$

搜索区域：$-10\leqslant x_i\leqslant 10$，$i=1,\cdots,n$. 有许多局部最优解，$n\cdot 3^n$ 个全局最优解，$n=2$ 时，全局最优值为 -186.7309.

我们选取了 10 个测试函数，这些测试函数大多是比较难求解的，它们有的具有遗传欺骗性(例 1)、有的有许多局部最优点(例 2～例 5，例 8～例 10)、有的有多个全局最优点(例 7，例 9，例 10). 能在许多个局部最优解中找到问题的全局最优解是全局优化的一大挑战，能全部找到具有多个全局最优点的问题的所有最有点则是我们所提出算法的一个特点.

对上述十个测试函数进行了数值试验，实际上求解了 16 个问题. 参数设置如下：$\delta=1\mathrm{e}-6$，$P_s=1$，$P_m=0.9$，$M=10$，$N=2$. 表 1 给出了数值试验的结果，其中，IGA 表示算法 2；IA 表示算法 1；Ef 表示算法 2 中遗传算法对 $f(X)$ 的评估此数；$E\mathcal{F}$ 表示目标函数区间扩张的评估次数；$\mathcal{F}'$ 表示梯度函数区间扩张的评估次数；CPU 表示 IGA 和 IA 分别对问题求解的计算时间.

表 1 数值求解结果比较

测试函数	搜索区域	维数	Ef	$E\mathcal{F}$		$E\mathcal{F}'$		CPU	
			IGA	IGA	IA	IGA	IA	IGA	IA
例 1	[-1000 1000]	2	186	155	460	155	159	0.203	0.157
例 2	[-10 10]	2	146	110	337	110	75	0.188	0.128
		5	650	275	2159	275	199	0.859	1.266
		10	2641	575	8873	575	411	3.797	6.969
例 3	[-4.5 4.5]	2	7724	944	69084	944	1283	4.875	19.141
例 4	[-500 700]	2	251	99	857	99	115	0.234	0.328
		10	6090	511	17282	511	565	8.890	20.594
		15	12535	735	38048	735	847	24.203	64.203
例 5	[-5.12 5.12]	2	488	143	2002	143	179	0.344	0.422
		5	115851	1707	349780	1707	2367	71.203	107.797
例 6	[-100 100]	2	455	273	852	273	287	0.406	0.204
例 7	[-5 10;0 15]	2	4661	939	20103	939	799	3.047	3.109
例 8	[-500 500]	2	311	171	1775	171	197	0.313	0.515
		4	20179	1267	191202	1267	1825	13.829	63.313
例 9	[-5 5]	2	42402	1915	85602	1915	1931	22.578	17.640
例 10	[-10 10]	2	146639	3647	902333	3647	4467	77.593	468.750

IGA 中虽然融入了遗传算法，但它总体上是个区间算法(见 4 收敛性分析)，所以每次求解问题时，肯定能求得满足精度的最优解，即算法的成功率为 100%，但是计算时间以及评估次数每次有些差异，所以表中 IGA 所对应的评估次数均是由其对问题进行 10 次计算后的平均值. 在区间优化算法中，目标函数和梯度函数区间扩张的评估次数的多少直接影响着算法的求解时间，评估次数越多，一般耗时越多. 因此常用 $E\mathcal{F}$ 和 $E\mathcal{F}'$ 的次数来比较区间优化算法的优劣，但是如果和遗传算法的评估次数进行比较，则需要注意下面的问题，遗传算法评估一次的时间一般小于 $E\mathcal{F}$ 评估一次的时间，尤其是当问题维数增大时，这种差距越明显. Sotiropoulos 在文献[5]中将 $E\mathcal{F}$ 或 $E\mathcal{F}'$ 评估一次看

作是遗传算法评估次数的两倍,以此来消除这种差异,这种做法默认了 $E\mathcal{F}$ 或 $E\mathcal{F}'$ 评估一次所需要的时间和遗传算法评估一次所需时间的两倍相当.在达到同样的求解精度下,IGA 的评估次数一般比 IA 的少,而且维数越高,差异越明显,例如对于例 3,IGA 比 IA 少评估了 60346 次,效果非常的明显.

从表 1 最后一列可以看出,IGA 在求解例 1,2 维例 2 和例 6 时,计算时间比 IA 的多,但是没有超过 0.3 秒.求解例 9 时,IGA 比 IA 多了近 5 秒,但是除此之外,IGA 的计算时间均比 IA 的少.对 10 维例 2,2 维例 3,10 维、15 维例 4,5 维例 5,4 维例 8,2 维例 9,2 维例 10,IGA 与 IA 计算时间差距很明显.

6 结论

本文在区间算法的基础上,结合遗传算法提出了一种区间 —遗传算法,该算法一方面利用区间算法为遗传算法提供可靠的搜索区域,另一方面遗传算法为区间算法提供了一个分裂方向和一个最优解的上界,实验表明本文提出的区间 —遗传算法比传统的区间优化算法有较高的执行效率.但是随着问题维数的增加,求解的时间仍是个棘手的问题,继续的工作可以从下方面进行:(1)分裂个数以及区间选择规则等方面改进区间算法,寻找高效的区间删除方法;(2)利用启发式方法的技巧改进目标函数或梯度函数区间扩张的上下界,指导区间分裂的方向.

参考文献:

[1] 徐宗本,张讲社,郑亚林.计算智能中的仿生学:理论与算法[M].北京:科技出版社,2003.

[2] 申培萍.全局优化方法[M].北京:科学出版社,2006.

[3] Wolfe M A. Interval Methods for Global Optimization[J]. Applied Mathematics and Computation, 1996, 75(2 - 5):179 - 206.

[4] Csendes Tibor. New subinterval selection criteria for interval global optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2001, 19(3):307 - 327.

[5] Sotiropoulos D G, Stavropoulos E C, et al. A new hybrid genetic algorithm for global optimization[J]. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, 1997, 30(7):4529 - 4538.

[6] Zilinskas Julius. Estimation of functional ranges using standard and inner interval arithmetic[J]. Informatica, 2006, 17(1):125 - 136.

[7] Casado L G, Martinez J A, Garcia I. Experiments with a new selection criterion in fast interval optimization algorithm[J]. Journal of Global Optimization, 2001, 19(3):247 - 264.

[8] Casado L G, Garcia I, Csendes T. A heuristic rejection criterion in interval global optimization algorithms[J]. BIT, 2001, 41(4):683 - 692.

作者简介:

张晓伟　男,1979 年生于陕西宝鸡,博士研究生.主要研究方向为进化算法及最优化理论与方法.E-mail:x.w.zhang@126.com

刘三阳　男,1959 年生于陕西西安,教授,博士生导师,主要研究方向为最优化理论与方法、现代优化、网络算法及其应用等.
E-mail:liusanyang@126.com